**שאלה 1**

תהי A קבוצה **לא-ריקה**, R יחס (רלציה) מעל A.

נסמן ב-  את **המשלים** של R ב- .

בכל אחד מהסעיפים הבאים, מצא את הטענה הנכונה **ונמק בקיצור**. אין צורך בהוכחה מלאה.

(6 נק') א. אם R יחס רפלקסיבי אז :

(1) רפלקסיבי (2) אינו רפלקסיבי

(3) יכול להיות רפלקסיבי ויכול לא להיות רפלקסיבי.

(6 נק') ב. אם R סימטרי אז :

(1) סימטרי (2) אנטי-סימטרי

(3) לא חייב להיות סימטרי ולא חייב להיות אנטי-סימטרי.

(6 נק') ג. אם R אנטי-סימטרי אז :

(1) סימטרי (2) אנטי-סימטרי

(3) לא חייב להיות סימטרי ולא חייב להיות אנטי-סימטרי.

(7 נק') ד. אם R אנטי-סימטרי אז **הסגוֹר הטרנזיטיבי** של R :

(1) אנטי-סימטרי

(2) אינו אנטי-סימטרי

(3) יכול להיות אנטי-סימטרי ויכול לא להיות אנטי-סימטרי.

**שאלה 2**

תהי  . תהי M קבוצת כל היחסים (הרלציות) מעל A.

תהי  הפונקציה המתאימה לכל  את הסגוֹר **הרפלקסיבי** שלו

(הכרך "תורת הקבוצות" עמ' 55).

(5 נק') א. מהו  ?

(8 נק') ב. האם f היא **חד-חד-ערכית**? האם f היא **על** M ?

(7 נק') ג. הוכח שיש בדיוק 64 רלציות שונות **בתמונה** של f

(התמונה של f היא קבוצת אברי M שניתן לקבל אותם כתוצאה של הפעלת f ).

(5 נק') ג. נתבונן ביחס השקילות המושרה ב- M על-ידי f (יחס זה מוגדר כך:

 שייכים לאותה מחלקת שקילות אםם .

**אינך** נדרש להוכיח שזהו יחס שקילות).

לכמה מחלקות שקילות מתחלקת M על-ידי היחס הזה ?

יש לנמק את כל התשובות!

**שאלה 3**

תהי . נגדיר יחסים (רלציות) R,S,T מעל הקבוצה **** :   
R הוא יחס ההכלה , כלומר עבור מתקיים:  אםם .  
 S הוא **הסגוֹר הסימטרי** של R.  .

(8 נק') א. הוכח ש- R הוא טרנזיטיבי , והוכח ש- S **אינו** טרנזיטיבי.

(8 נק') ב. הוכח ש-  .

(9 נק') ג. **הוכח או הפרך**: לכל  מתקיים .

### שאלה 4

עבור רלציה R מעל קבוצה A, נסמן ב-  את הסגור הטרנזיטיבי של R וב-  את הסגור הסימטרי של R.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| (12 נק') | א. | תן דוגמה לקבוצה A ורלציה R מעל A כך ש-  . |
|  |  |  |
| (13 נק') | ב. | להלן "הוכחה" כי  . מצא את המקום או המקומות בהם יש טעות בהוכחה. בתשובה, ציין את המעבר או המעברים מבין (a-h) בהם יש טעות, והסבר בקיצור מהי הטעות באותו מעבר או באותם מעברים. אין צורך להתייחס למעברים הנכונים. |

**שאלה 1**

תהי U קבוצה, ונקבע קבוצה B, . בעזרת B נגדיר פונקציה  כך: לכל , 

כאשר ' מסמן את המשלים ביחס ל- U.

אחת משתי הטענות הבאות נכונה לכל U,B כנ"ל, ואחת לא.

הוכח את הטענה הנכונה, והפרך ע"י דוגמא נגדית את הטענה שאינה נכונה:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| (10 נק') | א. | לכל , |
| (10 נק') | ב. | לכל , |

### שאלה 1

R היא רלציה מעל קבוצה A. s מסמן סגוֹר סימטרי, t מסמן סגוֹר טרנסיטיבי.

הוכח או הפרך ע”י דוגמא נגדית כל אחת מהטענות הבאות:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| (7 נק') | א. |  |
| (6 נק') | ב. |  |
| (7 נק') | ג. |  |

**שאלה 1**

תהי A קבוצה, ותהי .

בעזרת הקבוצה הקבועה B נגדיר פונקציה  באופן הבא:

לכל ,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | אם :  אם : |  |

תהי .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| (7 נק') | א. | הוכח כי אם X זרה ל- B אז . |
|  |  |  |
| (7 נק') | ב. | הוכח כי אם  אז . |
|  |  |  |
| (11 נק') | ג. | הוכח כי X שייכת לתמונת f **אם ורק אם** .  נמק היטב כל צעד. |

**שאלה 1**

*תהי* A קבוצה, ונסמן ב-  *את קבוצת כל הרלציות מעל* A*.*

*נגדיר פונקציה*  *כך:*

*לכל* *,* *.*

*(ההפרש הסימטרי,*  *, הוגדר בכרך I עמ' 27 שאלה 1.22 .*

*ניתן להיעזר בתכונות שלו המתוארות שם).*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *(7 נק')* | *א.* | *הראה כי*  *אם ורק אם* R *היא סימטרית.* |
|  |  |  |
| *(6 נק')* | *ב.* | *הראה כי אם רלציה* S *היא בתמונת* f *אז* S *היא סימטרית.* |
|  |  |  |
| *(6 נק')* | *ג.* | *תהי* R *רלציה כלשהי מעל* A*. מה תוכל לומר על*  *? הוכח.* |
|  |  |  |
| *(6 נק')* | *ד.* | *הראה כי אם רלציה* S *היא בתמונת* f *אז* *.* |
|  |  |  |
| *(5 נק'*  *בונוס)* | *ה.* | *סעיף רשות: בונוס 5 נקודות (לא יינתן ניקוד מעל 100).*  *נניח* *.*  *הראה כי כל רלציה סימטרית* S *מעל* ***N*** *,*  *המקיימת גם*  *, היא בתמונת* f *.* |

### שאלה 1

### (אין קשר בין סעיפי השאלה)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| (11 נק') | א. | תהי R רלציה מ- A ל- B, כך ש-  ("תורת הקבוצות" עמ' 35). הראה כי הרלציה  רפלקסיבית וסימטרית. הראה ע"י דוגמא נגדית כי  אינה בהכרח רלצית שקילות מעל A. |
|  |  |  |
| (11 נק') | ב. | תהי R רלציה מעל קבוצה A (כלומר מ- A ל- A).  הוכח או הפרך: . |
|  |  |  |
| (11 נק') | ג. | תהי R רלציה מעל קבוצה A. הוכח:  . |

שאלה 1

בשאלה זו, *R* היא רלציה על קבוצה *A*, ו-  היא **הסגור** של *R* ביחס לתכונה "להיות רלציית שקילות". כלומר  היא רלציית שקילות על *A*,  וכל רלציית שקילות אחרת המכילה את *R*, מכילה גם את .

1. תהיינה 



רשמי את .

1. אם *A* קבוצה כלשהי ו- , מהי ?
2. תארי במלים **באופן מפורט** (**או**, אם עדיף - בנוסחה) מהי , בהינתן רלציה *R* כלשהי על קבוצה *A* כלשהי.
3. אם *R* היא יחס סדר חלקי על *A*, כך שבסידור החלקי *R* קיים איבר **קטן ביותר** (עמ' 93 כרך I) - מהי ?
4. האם התשובה לסעיף ד' היתה משתנה אם **במקום** "איבר קטן ביותר" היינו דורשים "איבר מינימלי" (עמ' 91 כרך I)? הסבירי!

**שאלה 1**

תהי A קבוצה לא-ריקה, ונסמן ב-  את קבוצת כל הרלציות מעל A.

תהי  הפונקציה הבאה: לכל , .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| (13 נק') | א. | מצא את תמונת f (התמונה של פונקציה היא קבוצת כל האיברים בטווח שהם תמונות של איברים בתחום). הוכח בפירוט שהקבוצה שמצאת היא אכן התמונה.  **הדרכה/הֵסבר:** רלציה S נמצאת בתמונת f אם ורק אם קיימת רלציה R מעל A כך ש- . עליך למצוא את כל הרלציות S הללו.  שים לב גם לכך, שכדי להראות שקבוצה מסוימת היא התמונה עליך להראות הכלה דו-כיוונית. |
|  |  |  |
| (8 נק') | ב. | הראה שאם  אז f היא חד-חד-ערכית ועל. |
|  |  |  |
| (12 נק') | ג. | הראה שאם  אז f **אינה** חד-חד-ערכית **ואינה** על . |

**שאלה 1**

תהי A קבוצה **לא-ריקה**, R יחס (רלציה) מעל A.

נסמן ב-  את **המשלים** של R ב- .

בכל אחד מהסעיפים הבאים, מצא את הטענה הנכונה **ונמק בקיצור**. אין צורך בהוכחה מלאה.

(6 נק') א. אם R יחס רפלקסיבי אז :

(1) רפלקסיבי (2) אינו רפלקסיבי

(3) יכול להיות רפלקסיבי ויכול לא להיות רפלקסיבי.

(6 נק') ב. אם R סימטרי אז :

(1) סימטרי (2) אנטי-סימטרי

(3) לא חייב להיות סימטרי ולא חייב להיות אנטי-סימטרי.

(7 נק') ג. אם R אנטי-סימטרי אז :

(1) סימטרי (2) אנטי-סימטרי

(3) לא חייב להיות סימטרי ולא חייב להיות אנטי-סימטרי.

(6 נק') ד. נתבונן בשוויון  .

(1) שוויון זה מתקיים תמיד

(2) שוויון זה מתקיים אם ורק אם 

(3) אם R אנטי-סימטרית אז השוויון הנ"ל מתקיים.

הערה: *Domain(*R*)* הוגדר בכרך "תורת הקבוצות" בעמ' 35.

**שאלה 1**

תהי . תהי  .

להלן יחסים (רלציות) שונים המוגדרים מעל M.

בכל סעיף, קבע אם היחס המוגדר באותו סעיף הוא:

(i) רפלקסיבי? (ii) סימטרי? (iii) אנטי-סימטרי? (iv) טרנזיטיבי? **נמק כל תשובה**.

(*6* נק') א. היחס R המוגדר כך:  אםם  .

(*6* נק') ב. היחס S המוגדר כך:  אםם  .

(*6* נק') ג. היחס T המוגדר כך:  אםם  היא **חלוקה** של A.

(*6* נק') ד. היחס K המוגדר כך:  אםם .

(1 נקודה: בהירות הנימוקים).

תזכורות:

\* העובדה שיחס הוא סימטרי אינה מונעת ממנו להיות אנטי-סימטרי.

\*  הוא האיבר הקטן ביותר ב- X ,  הוא האיבר הגדול ביותר ב- Y.

**שאלה 1**

בכל אחד מהסעיפים הבאים, מצא את הטענה הנכונה **ונמק בקיצור**. אין צורך בהוכחה מלאה.

(6 נק') א. תהי , ותהי . אז:

(1)  (2)  (3) 

(4) אף אחת מהטענות 3,2,1 אינה נכונה.

(6 נק') ב. תהי A קבוצה סופית. תהי S קבוצת הרלציות הסימטריות מעל A,

ותהי K קבוצת הרלציות האנטי-סימטריות מעל A.  היא:

(1) 1 (2) 0 (3)  (4) 

(7 נק') ג. תהי R רלציה מעל A. השוויון 

(1) מתקיים תמיד (2) מתקיים רק עבור 

(3) מתקיים אם ורק אם 

(4) אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

(6 נק') ד. תהיינה A,B קבוצות **זרות** ולא-ריקות. תהי  רלציית שקילות מעל A,

ותהי  רלציית שקילות מעל B. נסמן , .

אז E היא:

(1) רלציית שקילות מעל C.

(2) רלציה מעל C שאינה רלציית שקילות מעל C.

(3) רלציה מעל C שיכולה להיות שקילות מעל C,

ויכולה לא להיות שקילות מעל C (תלוי בקבוצות A,B וברלציות )

(4) אינה רלציה מעל C.

**שאלה 1**

תהי .

להלן יחסים (רלציות) שונים המוגדרים מעל  (שים לב: מעל , לא מעל A ).

בכל סעיף, קבע אם היחס המוגדר באותו סעיף הוא:

(i) רפלקסיבי? (ii) סימטרי? (iii) אנטי-סימטרי? (iv) טרנזיטיבי? **נמק כל תשובה**.

(*6* נק') א. היחס R המוגדר כך:  אםם  .

(*6* נק') ב. היחס S המוגדר כך:  אםם  .

(*6* נק') ג. היחס T המוגדר כך:  אםם  או .

(*6* נק') ד. היחס K המוגדר כך:  אםם  = **סכום** אברי Y. דוגמא: אם  ו- 

מתקיים  כי  סכום אברי Y.

סכום אברי  מוגדר להיות 0.

(1 נקודה: בהירות הנימוקים).

תזכורת: העובדה שיחס הוא סימטרי אינה מונעת ממנו להיות אנטי-סימטרי.

**שאלה 1**

תהי A קבוצה **לא-ריקה**, R ,S יחסים (רלציות) מעל A.  היא רלציית היחידה מעל A.

בכל אחד מהסעיפים הבאים, מצא את הטענה הנכונה **ונמק רק אותה בקיצור**.

אין צורך בהוכחה מלאה.

הסימן  (הפרש סימטרי) הוגדר בשאלה 1.22 בעמ' 27 בכרך "תורת הקבוצות".

(6 נק') א. איזה מהתנאים הבאים מתקיים תמיד:

(1)  (2) 

(3)  (4) 

(5) אף אחד מ- 4 התנאים הנ"ל אינו חייב להתקיים.

(6 נק') ב.  הוא:

(1) סימטרי ולא אנטי-סימטרי (2) אנטי-סימטרי ולא סימטרי

(3) סימטרי ואנטי-סימטרי גם יחד (4) אף אחד מהנ"ל אינו חייב להתקיים.

(6 נק') ג. **אם** R הוא יחס שקילות מעל A **אז**:

(1) 

(2)  , וייתכן שזו הכלה-ממש, כלומר ייתכן שהם אינם שווים

(3)  , וייתכן שזו הכלה-ממש, כלומר ייתכן שהם אינם שווים

(4)  , ולא חייבת להיות הכלה באף כיוון

(5) ייתכן ש- , ייתכן שלא, ייתכן שיש הכלה ויתכן שאין – כל אלה אפשריים,

תלוי בקבוצה A וברלציה R .

(7 נק') ד. נתבונן בשתי הקבוצות:  ו-  .

איזה מהטענות הבאות נכונה:

(1) שתי הקבוצות הללו שוות.

(2) 

ויש מקרים בהם הכלה בכיוון ההפוך אינה מתקיימת.

(3) 

ויש מקרים בהם הכלה בכיוון ההפוך אינה מתקיימת.

(4) אף אחת משתי הקבוצות אינה חייבת להכיל את השניה.

הערה: *Domain(*R*)* הוגדר בכרך "תורת הקבוצות" בעמ' 35.

**שאלה 1**

תהי .

להלן יחסים (רלציות) שונים המוגדרים מעל  (שים לב: מעל , לא מעל A ).

בכל סעיף, קבע אם היחס המוגדר באותו סעיף הוא:

(i) רפלקסיבי? (ii) סימטרי? (iii) אנטי-סימטרי? (iv) טרנזיטיבי? **נמק כל תשובה**.

בכל תת-סעיף, ציין בבירור **ובהדגשה** את התשובה הסופית.

(*8* נק') א. היחס S המוגדר כך:  אםם 

(אין כאן טעות - בכוונה Y אינו מופיע).

(*8* נק') ב. היחס T המוגדר כך:  אםם  .

(*8* נק') ג. היחס K המוגדר כך:  אםם

קיים מספר שלם (לאו דווקא חיובי) c , כך ש- .

(1 נקודה: בהירות הנימוקים).

תזכורת: העובדה שיחס הוא סימטרי אינה מונעת ממנו להיות אנטי-סימטרי.